**About the authors**

Dr Nikolay Kashchenko — Ass. Prof., I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.
E-mail: kaschtschenko@mail.ru

Dr Sergey Matsievsky — Ass. Prof., I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.
E-mail: matsievsky@newmail.ru

Andrey Viktorov — PhD student, I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.
E-mail: andrey_vik@mail.ru



УДК 669.18.046.517

***С. В. Веревкин, С. А. Дёмин***

# КОНЕЧНО-РАЗНОСТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА В КОВШЕ СО СТАЛЬЮ

*Для численного решения краевой задачи конвективного теплообмена в ковше при продувке стали аргоном предложена конечно-разностная аппроксимация исходной математической модели конвективного теплопереноса в непрерывной дивергентной форме. Использована устойчивая и экономная неявная монотонная консервативная разностная схема.*

*For the numerical solution of the boundary value problem of convective heat transfer in a ladle while blowing steel argon proposed finite-difference approximation of the original mathematical model of convective heat transfer in a continuous divergence form. Used stable and economical implicit monotone conservative difference scheme.*

**Ключевые слова:** конвективный теплоперенос, уравнение переноса вихря, уравнение переноса тепла, уравнение Пуассона для функции тока, дивергентное представление модели, разностная схема, односторонняя четырехточечная разностная аппроксимация внутрь области.

**Key words:** convective heat transfer, vortex transport equation, heat transfer equation, Poisson equation for the stream function, divergent representation of a model, differences scheme, one-sided four-point difference approximation inside the area.

Математическая модель конвективного теплопереноса в ковше со сталью в дивергентном представлении может быть представлена в виде ($\Theta$, $\omega$, $\Psi$)-системы [1; 2]

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial \omega}{\partial z} - \vartheta\omega\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r\,\mathrm{Re}}\frac{\partial (r\omega)}{\partial r} - u\omega\right), \tag{1}$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\frac{\partial\Theta}{\partial z}-\vartheta\Theta\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\frac{\partial\Theta}{\partial r}-u\Theta r\right), \qquad (2)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)=-\omega r, \qquad (3)$$

где (1) — уравнение переноса вихря; (2) — уравнение переноса тепла; (3) — уравнение Пуассона для функции тока; $\psi$ — функция тока, связанная с компонентами скорости соотношениями



$$u=-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z},\quad \vartheta=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r},$$

где $u$ и $\vartheta$ — проекции скорости движения расплава на оси $r$ и $z$; $\omega=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial\vartheta}{\partial r}$ — функция вихря скорости.

Уравнения (1)—(3) записаны в безразмерном виде в цилиндрической системе координат. Предполагается, что краевые условия задачи соответствуют аксиальной симметрии температуры, скорости и давления и исключают азимутальное движение расплава.

Для численного решения системы уравнений (1)—(3) необходимо представление исходных выражений в приближенной конечно-разностной форме. Для перехода от представления системы уравнений (1)—(3) в непрерывном виде к конечно-разностному аналогу используем устойчивую и экономную неявную монотонную консервативную разностную схему [1].

Уравнение переноса вихря (1) можно аппроксимировать следующим образом:

$$\begin{aligned}x(\omega_{kl}-\tilde{\omega}_{kl})&=\frac{\omega_{k,l+1}-\omega_{kl}}{\mathrm{Re}(\Delta z)^2(1+0,5\,\mathrm{Re}\,\Delta z\left|\vartheta_{k,l+1/2}\right|)}-\frac{\omega_{kl}-\omega_{k,l-1}}{\mathrm{Re}(\Delta z)^2(1+0,5\,\mathrm{Re}\,\Delta z\left|\vartheta_{k,l-1/2}\right|)}-\\&-\frac{1}{\Delta z}(\vartheta^+_{k,l+1/2}\omega_{kl}-\vartheta^+_{k,l-1/2}\omega_{k,l-1}+\vartheta^-_{k,l+1/2}\omega_{k,l+1}-\vartheta^-_{k,l-1/2}\omega_{k,l})+\\&+\frac{r_{k+1}\omega_{k+1,l}-r_k\omega_{kl}}{r_{k+1/2}\mathrm{Re}(\Delta r)^2(1+0,5\,\mathrm{Re}\,\Delta r\left|U_{k+1/2,l}\right|)}-\\&-\frac{r_k\omega_{k,l}-r_{k-1}\omega_{k-1,l}}{r_{k-1/2}\mathrm{Re}(\Delta r)^2(1+0,5\,\mathrm{Re}\,\Delta r\left|U_{k-1/2,l}\right|)}-\\&-\frac{1}{\Delta r}(U^+_{k+1/2,l}\omega_{kl}-U^+_{k-1/2,l}\omega_{k-1,l}+U^-_{k+1/2,l}\omega_{k+1,l}-U^-_{k-1/2,l}\omega_{kl}),\end{aligned} \qquad (4)$$

где $\tilde{\omega}_{kl}$ — значение вихря на предыдущем шаге по времени; $x=\frac{1}{\Delta t}$ — параметр динамического процесса; $x=0$ соответствует стационарному режиму; $\vartheta^+=\frac{(\vartheta+|\vartheta|)}{2}$; $\vartheta^-=\frac{(\vartheta-|\vartheta|)}{2}$.

Уравнение переноса тепла (2) с помощью монотонной разностной схемы можно представить как

$$x(\Theta_{kl}-\tilde{\Theta}_{kl})=\frac{\Theta_{k,l+1}-2\Theta_{kl}+\Theta_{k,l+1}}{Pe(\Delta z)^2(1+0,5Pe\Delta r\left|\vartheta_{kl}\right|)}-\vartheta^{-}_{kl}\frac{\Theta_{k,l+1}-\Theta_{kl}}{\Delta z}-\vartheta^{+}_{kl}\frac{\Theta_{kl}-\Theta_{k,l-1}}{\Delta z}+$$
$$+\frac{r_{k+1/2}}{r_k}\cdot\frac{(\Theta_{k+1,l}-\Theta_{kl})}{Pe(\Delta r)^2(1+0,5Pe\Delta r\left|U_{kl}\right|)}-\frac{r_{k-1/2}}{r_k}\cdot\frac{(\Theta_{kl}-\Theta_{k-1,l})}{Pe(\Delta r)^2(1+0,5Pe\Delta r\left|U_{kl}\right|)}- \qquad (5)$$
$$-U^{-}_{kl}\frac{\Theta_{k+1,l}-\Theta_{kl}}{\Delta z}-U^{+}_{kl}\frac{\Theta_{kl}-\Theta_{k-1,l}}{\Delta z},$$



где $\tilde{\Theta}_{kl}$ — значение температуры на предыдущем шаге по времени.

Уравнение Пуассона для функции тока (3) аппроксимируем с помощью следующей разностной схемы:

$$\Delta^{\psi}_{kl}=\frac{\psi_{k,l+1}-2\psi_{kl}+\psi_{k,l-1}}{(\Delta z)^2}+\frac{r_k}{(\Delta r)^2}\left(\frac{\psi_{k+1,l}-\psi_{kl}}{r_{k+1/2}}-\frac{\psi_{kl}-\psi_{k-1,l}}{r_{k-1/2}}\right)+r_k\omega_{kl}=0. \qquad (6)$$

Произведём группировку членов разностных уравнений (4)—(6).

Разностное соотношение (4) представим в виде

$$\Delta^{\omega}_{kl}=A^{\omega}_{kl}\omega_{k+1,l}+B^{\omega}_{kl}\omega_{k-1,l}+C^{\omega}_{kl}\omega_{k,l+1}+D^{\omega}_{kl}\omega_{k,l-1}+E^{\omega}_{kl}\omega_{kl}+x\tilde{\omega}_{kl}=0, \qquad (7)$$

где

$$A^{\omega}_{kl}=\frac{r^{k+1}}{r_{k+1/2}}\left(\mathrm{Re}(\Delta r)^2(1+0,5\,\mathrm{Re}\,\Delta r\left|U_{k+1/2,l}\right|)\right)^{-1}-\frac{1}{\Delta r}U^{-}_{k+1/2,l},$$

$$B^{\omega}_{kl}=\frac{r_{k-1}}{r_{k-1/2}}\left(\mathrm{Re}(\Delta r)^2(1+0,5\,\mathrm{Re}\,\Delta r\left|U_{k-1/2,l}\right|)\right)^{-1}+\frac{1}{\Delta r}U^{+}_{k-1/2,l},$$

$$C^{\omega}_{kl}=\left(\mathrm{Re}(\Delta z)^2(1+0,5\,\mathrm{Re}\,\Delta z\left|\vartheta_{k,l+1/2}\right|)\right)^{-1}-\frac{1}{\Delta z}\vartheta^{-}_{k,l+1/2},$$

$$D^{\omega}_{kl}=\left(\mathrm{Re}(\Delta z)^{-2}(1+0,5\,\mathrm{Re}\,\Delta z\left|\vartheta_{k,l-1/2}\right|)\right)^{-1}+\frac{1}{\Delta z}\vartheta^{+}_{k,l-1/2},$$

$$E^{\omega}_{kl}=-\frac{r^k}{r_{k+1}}A_{kl}-\frac{r_k}{r_{k-1}}B_{kl}-C_{kl}-D_{kl}-\frac{1}{\Delta r}(U^{+}_{k+1/2,l}-U^{-}_{k-1/2,l})-\frac{1}{\Delta z}(\vartheta^{+}_{k,l+1/2}-\vartheta^{-}_{k,l-1/2})-x.$$

Разностное соотношение (5) представим в виде

$$\Delta^{\Theta}_{kl}=A^{\Theta}_{kl}\Theta_{k+1,l}+B^{\Theta}_{kl}\Theta_{k-1,l}+C^{\Theta}_{kl}\Theta_{k,l+1}+D^{\Theta}_{kl}\Theta_{k,l-1}+E^{\Theta}_{kl}\Theta_{kl}+x\tilde{\Theta}_{kl}=0, \qquad (8)$$

где

$$A^{\Theta}_{kl}=\frac{r_{k+1/2}}{r_k}\left(Pe(\Delta r)^2(1+0,5\Delta r\left|U_{kl}\right|)\right)^{-1}-\frac{1}{\Delta r}U^{-}_{kl},$$

$$B^{\Theta}_{kl}=\frac{r_{k-1/2}}{r_k}\left(Pe(\Delta r)^2(1+0,5\Delta r\left|U_{kl}\right|)\right)^{-1}+\frac{1}{\Delta r}U^{+}_{kl},$$

$$C_{kl}^{\Theta} = \left(Pe(\Delta z)^2(1+0,5\Delta z|\vartheta_{kl}|)\right)^{-1} - \frac{1}{\Delta z}\vartheta_{kl}^{-},$$

$$D_{kl}^{\Theta} = \left(Pe(\Delta z)^2(1+0,5\Delta z|\vartheta_{kl}|)\right)^{-1} + \frac{1}{\Delta z}\vartheta_{kl}^{+},$$

$$E_{kl}^{\Theta} = -A_{kl}^{\Theta} - B_{kl}^{\Theta} - C_{kl}^{\Theta} - D_{kl}^{\Theta} - x.$$

Разностное соотношение (6) представим в следующем виде:

$$\Delta_{kl}^{\psi} = A_{kl}^{\psi}\psi_{k+1,l} + B_{kl}^{\psi}\psi_{k-1,l} + C_{kl}^{\psi}\psi_{k,l+1} + D_{kl}^{\psi}\omega_{k,l-1}\omega_{k,l-1} + E_{kl}^{\psi}\psi_{kl} = 0, \quad (9)$$



где

$$A_{kl}^{\psi} = \frac{1}{(\Delta r)^2}\frac{r_k}{r_{k+1/2}}, \quad B_{kl}^{\psi} = \frac{1}{(\Delta r)^2}\frac{r_k}{r_{k-1/2}},$$

$$C_{kl} = D_{kl} = \frac{1}{(\Delta z)^2}, \quad E_{kl} = -\left(\frac{2}{(\Delta z)^2} + \frac{1}{(\Delta r)^2}\left(\frac{r_k}{r_{k+1/2}} + \frac{r_k}{r_{k-1/2}}\right)\right).$$

Одна из трудностей численного решения ($\Theta$, $\omega$, $\psi$)-системы состоит в постановке граничных условий для функции вихря скорости $\omega$. Функция $\omega$ определена только внутри рассматриваемой области ковша и не определена на ее границе. Однако при решении системы уравнений методом сеток требуется задание граничных условий и для $\omega$. Но граничные условия заданы лишь для скорости и температуры [1]. Для функции тока $\psi$ граничные условия находятся через условие для скорости. Используя метод В. Л. Грязнова и В. И. Полежаева [4], значения $\omega$ на границе не задают, а сама функция $\omega$ определяется итерацией. Главным условием определения $\omega$ является выполнение условия по $\psi$ на границе уменьшенной области, отстоящей от границ на один слой (интервал разбиения, шаг сетки).

Граничные условия по функции тока в непрерывной форме по определённой схеме аппроксимируются разностными аналогами. Подбором коэффициентов при членах полученного выражения ($\psi$ в различных слоях разностной сетки) достигается выполнение самого граничного условия по $\psi$.

Согласование граничных условий по $\psi$ проводят с помощью следующих разностных аппроксимаций нормальных производных по $\psi$ на границах области решений.

Для $\dfrac{\partial\psi}{\partial n}$ использована односторонняя четырехточечная разностная аппроксимация внутрь области $\left.\dfrac{\partial\psi}{\partial n}\right|_{\partial} \approx -\dfrac{1}{6h}(11\psi - 18\psi_1 + 9\psi_2 - 2\psi_3)$.

где $h$ — шаг дискретизации по соответствующей координате.

Условию прилипания соответствуют соотношения

$$\psi = 0, \ \psi_1 = \frac{1}{2}\psi_2 - \frac{1}{9}\psi_3.$$

Для $\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$ использована трехточечная аппроксимация внутрь области

$$\left.\frac{\partial^2\psi}{\partial n^2}\right|_{\partial} \approx -\frac{1}{2h^2}\left(7\psi_0 - 8\psi_1 + \psi_2\right).$$

Условию $\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0$ соответствует соотношение $\psi_1 = \frac{1}{8}\psi_2$.

Для $\left.\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\right|_{r=0}$ использована центральная трехточечная аппроксимация с центром в узлах разностной сетки, отстоящих от оси симметрии на один шаг дискретизации:

$$\left.\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\right|_{r=0} \approx \frac{1}{\Delta r}\left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{(3/2)(\Delta r)^2} - \frac{\psi_1 - \psi_0}{(1/2)(\Delta r)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{2}(\Delta r)^3}(\psi_2 - 4\psi_1 + 3\psi_0) = \frac{2}{3(\Delta r)^3}(3\psi_0 - 4\psi_1 + \psi_2).$$

Условию $\left.\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\right|_{r=0}$ соответствуют соотношения $\psi = 0,\ \psi_1 = \frac{1}{4}\psi_2$.

Результат воздействия всплывающих газовых пузырей на жидкий металл, приводящий к конвективному перемешиванию, задается в виде вертикальной составляющей скорости $\vartheta_{\partial-1}$ в слое узлов разностной сетки, отстоящем от поверхности фурмы на шаг дискретизации $\Delta r$ с помощью соотношения $\vartheta_{\partial-1} = \frac{1}{r_{\partial-1}}\frac{(\psi_{\partial-2} - \psi_{\partial})}{2\Delta r}$ (центральная разностная аппроксимация соотношения $\vartheta = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}$), откуда следует дополнительное соотношение $\psi_{\partial-2} = 2\Delta r \cdot r_{\partial-1}\vartheta_{\partial-1}$, согласно которому производится согласование граничных и приграничных значений $\psi$.

**Список литературы**

1. *Берковский Б. М., Ноготов Е. Ф.* Разностные методы исследования задач теплообмена. Минск, 1976.

2. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М., 1983.

3. *Коган А. Е.* Внепечные и ковшевые процессы. Новокузнецк, 1990.

4. *Грязнов В. Л., Полежаев В. И.* Исследование некоторых разностных схем аппроксимацией граничных условий для численного решения уравнений тепловой гравитационной конвекции. М., 1974.

**Об авторах**

Сергей Валерьевич Веревкин — канд. техн. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: verevkinserg@mail.ru

Сергей Александрович Дёмин — ст. преп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.
E-mail: sergeidemin@nm.ru

**About the authors**

Dr Sergey Veryovkin — Ass. Prof., I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.
E-mail: verevkinserg@mail.ru

Sergey Demin — high instructor, I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.
E-mail: sergeidemin@nm.ru



УДК 519.6

*А. И. Пахтеев, А. В. Степанов*

# ГЕНЕРИРОВАНИЕ РЕКОРДОВ МЕТОДОМ ВЫБОРКИ С ОТКЛОНЕНИЕМ

*Обсуждаются методы генерирования рекордов. Соответствующие алгоритмы генерирования основаны на методе выборки с отклонением. Особое внимание уделяется случаю, когда рекорды берутся из популяции, имеющей гамма-распределение.*

*Methods of record generation are discussed. The corresponding algorithms are based on the rejection method. We concentrate on a case when records are taken from a gamma population.*

**Ключевые слова:** рекорд, гамма-распределение, метод выборки с отклонением, метод обратного преобразования, метод генерации.

**Key words:** record, gamma-distribution, rejection method, inverse-transform method, generation technique.

## Введение

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность случайных величин, заданных на одном вероятностном пространстве. Определим рекордные моменты $L(n)$ и рекордные величины $X(n)$ следующим образом:

$$L(1) = 1,$$
$$L(n+1) = \min\left\{ j : j > L(n),\ X_j > X_{L(n)} \right\},\ X_n = X_{L(n)} \text{ для } n \geqslant 1.$$

Математическая теория рекордов имеет богатую историю и берет свое начало со статьи Чендлера [5]. Развитие теории рекордов является актуальным в связи с различными приложениями, возникающими в метеорологии, гидрологии, в страховом и финансовом бизнесе. Перепады температур и атмосферного давления, паводки рек, спортивные достижения, страховые и финансовые риски, различные модели, свя-